مستمرة من الأعلى على X إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(-\infty, t)$; $\forall t \in \mathbb{R}$.
مجموعة مفتوحة في X .

$\{x \in X ; f(x) < t\}$ مفتوحة في X .

ونسمي الدالة مستمرة من الأدنى إذا كانت الدالة f - تكون مستمرة من الأعلى.

ملاحظة:

الدالة f مستمرة على X إذا كانت مستمرة من الأعلى ومن الأدنى بآن واحد.

التطبيق المفتوح:

يقال أن التطبيق $f: X \to Y$ مفتوح إذا كانت الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة في X مجموعة مفتوحة في Y .

~~الهوميومورفيزم:~~

مثال:

ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ إن هذا التطبيق مستمر لكن الصورة المباشرة لـ $\mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) =]0,1]$.

بالتالي التطبيق غير مفتوح لأنه $f(\mathbb{R})$ ليست مفتوحة وليست مغلقة.

$$-\infty < x < +\infty$$

$$0 \leq x^2 < +\infty$$

$$1 \leq x^2 + 1 < +\infty$$

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$0 < f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{R}) =]0,1].$$

ليست مفتوحة وليست مغلقة.

الهوميومورفيزمات:

ليكن X , Y فضاءين طبولوجيين , $f: X \to Y$ يكون هذا التطبيق هوميومورفيزم إذا كان تقابل ومستمر الاتجاهين (f , f^{-1} دوال مستمرة).

مثال ص 70 مطلوب

ملاحظة:

يكون f هوميومورفيزم اذا وفقط اذا كان تقابل ومستمر ومفتوح.

تعريف:

ليكن (X,d) ، (Y,ρ) فضاءين متريين. نسمي التطبيق
$f: X \to Y$
ايزومتري أو تقايس اذا وفقط اذا كان تطبيق غامر ويحافظ على المسافة أي:
$\forall x,y \in X : \rho(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

ملاحظة:

الايزومتري هو عبارة عن هوميومورفيزم ويحافظ على المسافة.

تعريف:

ندعو المجموعتين X,Y متكافئتين ونكتب $(X \sim Y)$ اذا وجد تطبيق f ايزومتري بينهما ويكون f, f^{-1} مستمرة.

تعريف:

نقول عن فضائين طبولوجيين X,Y هوميومورفيان اذا وجد بينهما هوميومورفيزم.

ملاحظة:

الايزومتري بين الفضاءات المترية هو تطبيق متباين وغامر ويحافظ على المسافة.

تمرين:

ليكن التطبيق $f: (X,d) \to (Y,\rho)$ ايزومتري أو تقايس. اثبت أنه مستمر بانتظام وهوميومورفيزم.

الحل:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon \ ; \ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2))$
$= d(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$.

بالتالي التطبيق مستمر بانتظام.

نلاحظ أن هذا التطبيق متباين لأنه $\forall x_1, x_2 \in X \ ; \ f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) = 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0$ حسب
$\Rightarrow x_1 = x_2$ متباين، وبما أن f غامر $\Leftarrow$ تقابل
بالتالي f^{-1} موجود بالتالي يكون f^{-1} غامر. $\Leftarrow$ ايزومتري ويحافظ على المسافة.

الموضوع التاريخ / /

لأنه: $\forall x_1, x_2 \in X ; \ y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2) \Rightarrow$
$x_1 = f^{-1}(y_1), \ x_2 = f^{-1}(y_2)$.
$d(x_1, x_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = \rho(f(f^{-1}(y_1)), f(f^{-1}(y_2)))$

$= \rho(y_1, y_2) \Rightarrow \rho(y_1, y_2) = d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2))$

$\Rightarrow$ f^{-1} يحافظ على المسافة فهو تقايس.
بالتالي f^{-1} مستمر بانتظام على Y $\Leftarrow$ f^{-1} مستمر على Y.

بالتالي f هو هوميومورفيزم.

التطبيق الضاغط (المقلص):
ليكن (X,d) فضاءً مترياً ولتكن التطبيق A بحيث أن $A:(X,d) \to (X,d)$
نسمي هذا التطبيق تطبيقاً ضاغطاً إذا وجد عدد α حيث $0 < \alpha < 1$ بحيث أنه:
$\forall x, y \in X \Rightarrow d(AX, AY) \leq \alpha \, d(x,y)$.
نسمي عندئذٍ A تطبيقاً ضاغطاً لـ X.

ملاحظة:
التطبيق الضاغط مستمر بانتظام على X.

تعريف:
ليكن $A: X \to X$ تطبيق. نسمي النقطة $x \in X$ نقطة ثابتة للتطبيق A إذا كان $A(x) = x$.

مثال:

$A(x) = 5x \Rightarrow 5x = x \Rightarrow x = 0$.
$Ax = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$
$x = 1$

ملاحظة:
من الممكن أن لا توجد أي نقطة ثابتة للتطبيق الضاغط لكنه إذا كان التطبيق:
$A:(X,d) \to (X,d)$

Al Aziz

وتحقيقه الشرط $d(Ax, Ay) \leq d(x,y)$ لا يوجد له أي نقطة ثابتة.

مثال:

لنأخذ التطبيق: $A:(X,d) \to (X,d)$ حيث $X = [1, \infty[$

حيث d هي المسافة الطبيعية، حيث إن $Ax = \frac{x+1}{x}$.

$$d(Ax, Ay) = |Ax - Ay| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right|$$

$$= \left| (x-y)\cdot\left(1 - \frac{1}{xy}\right) \right| \leq |x-y| = d(x,y)$$

فهو تطبيق متقلص لكنه لا يوجد له أي نقطة ثابتة لأن:

$$Ax = x + \frac{1}{x}.$$

وهذه المعادلة مستحيلة الحل.

مبرهنة باناخ:

إذا كان (X,d) فضاء متري تام، A تطبيق متقلص من الفضاء المتري في نفسه. فإن التطبيق المتقلص يوجد له نقطة ثابتة وحيدة.

الإثبات: لنأخذ $x_0 \in X$ ولنشكل المتتالية x_n بالشكل:

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1 = A^2 x_0, \quad \dots, \quad x_n = A^n x_0, \dots$$

سنبرهن أن المتتالية x_n عبارة عن متتالية كوشي، لذلك:

$$d(x_n, x_m) = d(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \leq \alpha\, d(x_{n-1}, x_{m-1})$$

$$= \alpha\, d(Ax_{n-2}, Ax_{m-2})$$

بمتابعة هذه العملية:

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n})$$

حسب متباينة المثلث:

$$\leq \alpha^n \left[d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \right]$$

$$\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \left[1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1} \right]$$

$$\leq d(x_0, x_1) \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

وبذلك توجد نقطة $x \in X$ بحيث يكون $x_n \to X$ عندما $n \to \infty$ كون X تام

والتطبيق الضاغط مستمر لأنه منتظم. وبذلك يكون $Ax_n \to Ax$ ، $n \to \infty$

$$\Rightarrow x_{n+1} = A x_n$$

بأخذ النهاية للطرفين عندما $n \to \infty$ ⟸ $Ax = x$ وهذا يعني أن للتطبيق الضاغط المعرف نقطة ثابتة وهذا هو المطلوب.

ولنفرض أنه توجد نقطة ثابتة أخرى لهذا التطبيق ولتكن y عندئذ $Ay = y$

وبذلك نجد: $d(x,y) = d(Ax, Ay) \le \alpha d(x,y)$

$$\Rightarrow 0 \le d(x,y)[1-\alpha] \le 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

بالتالي النقطة الثابتة وحيدة.

مثال محلول:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، $|f'(x)| \le \alpha < 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$

حسب مبرهنة لاغرانج:

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(t)||x-y| \le$$

$$\alpha |x-y| = \alpha d(x,y) ; \quad 0 \le \alpha \le 1, \quad x \le t \le y$$

مبرهنة:

إذا كان (X,d) فضاء متري تام. و $A: X \to X$ وإذا كان A^n تطبيق ضاغط حيث $n \ge 1$ عندئذ تكون للمعادلة $Ax = x$ حل وحيد.

الإثبات: نرمز بـ $A^n = B$ فيكون:

توجد نقطة ثابتة وحيدة ⟸

$A^n x = Bx = x$ ①

$ABx = Ax$ ②

$(AB = BA = A^{n+1})$

$ABx = A^{n+1} x$

$BAx = ABx$ (3)

اذا كان $0 < C < 1$ واقترنا:

$$d(x, Ax) = d(Bx, BAx) \le C\, d(x, Ax)$$

$$0 \le d(x, Ax)[1 - C] \le 0 \Rightarrow d(x, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = x.$$

تصنيف المجموعات:

ليكن (X, d) فضاء طبولوجي ولتكن $S \subseteq X$ إن المجموعة S تسمى مجموعة من الصنف الأول اذا أمكن كتابتها على شكل اتحاد قابل للعد لأكثر مجموعات غير كثيفة بأي مكان من X.

كل مجموعة ليست من الصنف الأول تسمى مجموعة من الصنف الثاني.

مثال:

$\mathbb{Q}$ من الصنف الأول بينما $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ من الصنف الثاني.

ملاحظة:

اذا كانت M مجموعة جزئية من X (X فضاء تام). واذا كانت المجموعة M من الصنف الأول فإن المجموعة المتممة M من الصنف الثاني.

مبرهنة:

ليكن X فضاء متري تام. ولتكن $\{G_n\}$ متتالية من المجموعات المفتوحة الكثيفة عندئذ:

$$\bigcap_n G_n \ne \phi.$$

مبرهنة بير:

كل فضاء متري تام هو مجموعة من الصنف الثاني.

الإثبات: لنفرض أنه من الصنف الأول أي:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$$

عن طريقة ثانية يمكن اعتبار: $\overline{E_n}$ مغلقة وغير كثيفة.

$$\sim X = \sim\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}\right) \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \; ; \; \sim \overline{E_n} = G_n .$$

وهذا نبرهن حسب المبرهنة السابقة أنه [illegible] .
بالتالي الفضاء التام من الصنف الثاني .

الفضاء الخطي:

لتكن $X \neq \phi$ تسمى فضاء خطي فوق حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{K}$ أو العقدية إذا أمكن تعريف عمليتين على عناصر هذه المجموعة: الأولى $(+)$ والثانية $(\cdot)$ الضرب بعدد.

$(+) : X \times X \longrightarrow X \; ; \; (x, y) \longmapsto x + y$

$(\cdot) : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X \; ; \; (\lambda, x) \longmapsto \lambda x .$

تحقق الخواص الآتية:

$\forall x, y, z \in X \; , \; \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

1) $x + y = y + x .$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

3) $\exists \theta \in X ; \quad x + \theta = \theta + x = x .$

4) $\exists (-x) \in X ; \quad x + (-x) = \theta .$

5) $1 \cdot x = x$

6) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

7) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y .$

8) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x .$

ملاحظة:

في التعريف السابق إذا كان $\mathbb{K}$ هو $\mathbb{C}$ (حقل الأعداد العقدية) سمي فضاء خطي عقدي.

تعريف:

إذا كانت A, B مجموعتان جزئيتان من X عندئذٍ:

$A + B = \{ a + b \; ; \; a \in A , \; b \in B \} .$

$\lambda \cdot A = \{ \lambda a \; ; \; a \in A \}$

$A + Y = \{ a + y \; ; \; a \in A , \; y \in X \}$

تعريف:

ليكن X, Y فضاءين خطيين فوق الحقل K نسمي التطبيق

$$A: X \to Y$$

تطبيقاً خطياً إذا كان:

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2).$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall \lambda, \mu \in K$$

وبشكل خاص إذا كان A تطبيقاً خطياً وتقابل فإنه يسمى ايزومورفيزم. → $A: X \to X$

الفضاءات الخطية المولدة بمجموعة:

ليكن $M \subseteq X$ عندئذ الخطية المولدة بـ M والتي نرمز لها بـ L.Hull أو $Sp(M)$ تكون تقاطع كل الفضاءات الخطية الجزئية الحاوية على M.

تعريف:

لتكن المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ من X ومختلفة عن الصفر $x_i \neq \theta$ حيث $i = 1, 2, \ldots, n$. إن هذه المجموعة تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

~~وتوضيح~~ (هذا الفضاء θ هو المتجه الوحيد الذي مركباته أصفار).

ونقول عن هذه المجموعة أنها مرتبطة خطياً إذا وجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ليست كلها معدومة بحيث: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$

كل مجموعة ليست مستقلة خطياً تكون مرتبطة خطياً.

- ~~المجموعة المستقلة خطياً~~ المجموعة المستقلة خطياً لا يمكن أن تحوي العنصر الصفري.

قاعدة الفضاء:

نسمي المجموعة المنتهية B من الفضاء X قاعدة هامل للفضاء X إذا كانت B مجموعة مستقلة خطياً وكانت الخطية المولدة بالمجموعة B: $Sp(B) = X$

ملاحظات:

إذا كانت قاعدة هامل مؤلفة من n عنصر فأي مجموعة مؤلفة من $n+1$ عنصر ستكون مرتبطة خطياً.

إذا كان الفضاء X منتهي الأبعاد فإن كل قواعد هامل له تحوي ~~n عنصر~~ نفس العدد من العناصر.

بعد الفضاء:

الموضوع التاريخ / / 201

يكون الفضاء X منتهي الأبعاد إذا فقط كان لهذا الفضاء قاعدة هامل منتهية. كما أن بعد هذا الفضاء يطابق عدد عناصر قاعدة هامل فيه. أما إذا لم نستطع جعل قاعدة هامل منتهية يكون الفضاء غير منتهي.

مبرهنة:

إذا كان X منتهي الأبعاد ومن بعد n يكون ايزومورفيا مع $\mathbb{R}^n$.

الفضاء الحاصل:

التطابق: نقول عن عنصرين x, y أنهما متطابقان M ونكتب: $x \equiv y \mod M$ إذا كان: $x - y \in M$. وهذه العلاقة تمثل علاقة تكافؤ. وبالتالي توجد صفوف تكافؤ حيث أن صف تكافؤ العنصر x هو مجموعة من الفضاء المرتبطة مع x بالتطابق أي:

$$E_x = \{ y \in X ; y \equiv x \mod M \}.$$

ونكل عنصر صف تكافؤ.

نفرض M فضاء جزئي من فضاء خطي X. نسمي الفضاء $X \setminus M$ الفضاء الحاصل.

- إن الفضاء الحاصل هو مجموعة صفوف التكافؤ المعطاة بالشكل $\{E_x ; x \in X\}$ ولنعرف على هذا الفضاء العمليات:

$$(+) : E_x + E_y = E_{x+y}.$$
$$(x)+M \quad (y)+M \quad (x+y)+M.$$

$$(\cdot) : \lambda E_x = E_{\lambda x}.$$
$$\lambda(x+M) \quad (\lambda x)+M.$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أن:

$$E_x + E_y = \{ z ; z \equiv (x+y) \mod M ; z \in X \} = E_{x+y}.$$

$$\lambda E_x = \{ u ; u \equiv (\lambda x) \mod M ; u \in X \} = E_{\lambda x}.$$

$$E_0 = \{ x \mid x \equiv 0 \mod M \} = \{ x \in M \} = M.$$

بعض المفاهيم الطبولوجية:

تعريف القطعة المستقيمة: نرمز للقطعة المستقيمة $L(x, y)$

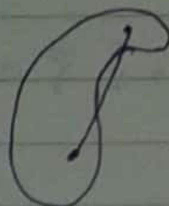
$L(x,y) = \{ z = \lambda x + (1-\lambda) y ; \quad 0 \le \lambda \le 1 \}$.

وهذه المجموعة تمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين x, y.

المجموعة المحدبة:

اذا كانت $\emptyset \ne E \subseteq X$ بالعرف تسمى مجموعة محدبة اذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين منتماتين محتواة بكاملها في المجموعة E.

هذه المجموعة غير محدبة.



أو بتعبير آخر: $\forall x, y \in E ; \forall \lambda, \mu \ge 0 ; \lambda + \mu = 1$

فإن المقصود: $\lambda x + \mu y \in E$.

المجموعة المحدبة مطلقاً:

يقال أنه $\emptyset \ne E \subseteq X$ (ف.ش). أنها محدبة مطلقاً اذا كان لأي عنصرين $x, y \in E$ ، $\forall \lambda, \mu$ بحيث: $|\lambda| + |\mu| \le 1$

فإن: $\lambda x + \mu y \in E$.

- كل محدبة مطلقاً تكون محدبة. العكس غير صحيح.
- كل فضاء جزئي من فضاء خطي هو مجموعة محدبة مطلقاً وذلك لأن:

$\forall x, y \in M, \forall \lambda, \mu \in K : \lambda x + \mu y \in M$.

وبشكل خاص اذا كان:

$\lambda + \mu ; \; |\lambda| + |\mu| \le 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in M$.

التابع المحدب:

اذا كانت E مجموعة محدبة ولتكن $E \subseteq X$ نسمي $f : E \to \mathbb{R}$ تابعاً محدباً على E اذا تحقق اذا كان من أجل أي عنصرين $x, y \in E$ حيث $\forall \lambda \ge 0$ $\mu \ge 0$

حيث $\lambda + \mu = 1$

$f(\lambda x + \mu y) \le \lambda f(x) + \mu f(y)$.

تذكر:

كل تطبيق خطي هو تابع محدب.

المجموعات المتوازنة:

لتكن $\emptyset \neq E \subseteq X$ تسمى E متوازنة إذا وفقط إذا كان

$\forall x \in E ; |\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda x \in E.$

الماصة:

يقال عن $\emptyset \neq E \subset X$ إنها مجموعة ماصة (ص) $\Leftrightarrow$

$\exists x \in X , \exists \rho = \rho(x) > 0 ;$

إذا كان $|\lambda| \le \rho$ فإن $\lambda x \in E$.